Chapitre 8

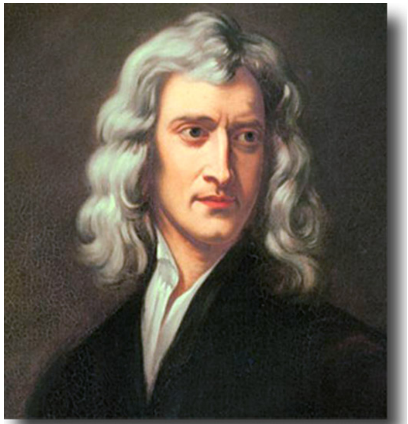
Loi d'action-réaction, collisions

EPFL

- **3^{e} loi de Newton :** Principia Mathematica

> L'action est toujours égale à la réaction ; c'est-à-dire que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et de sens contraire.

Sir Isaac Newton
$1643 - 1727$



Traduction moderne :

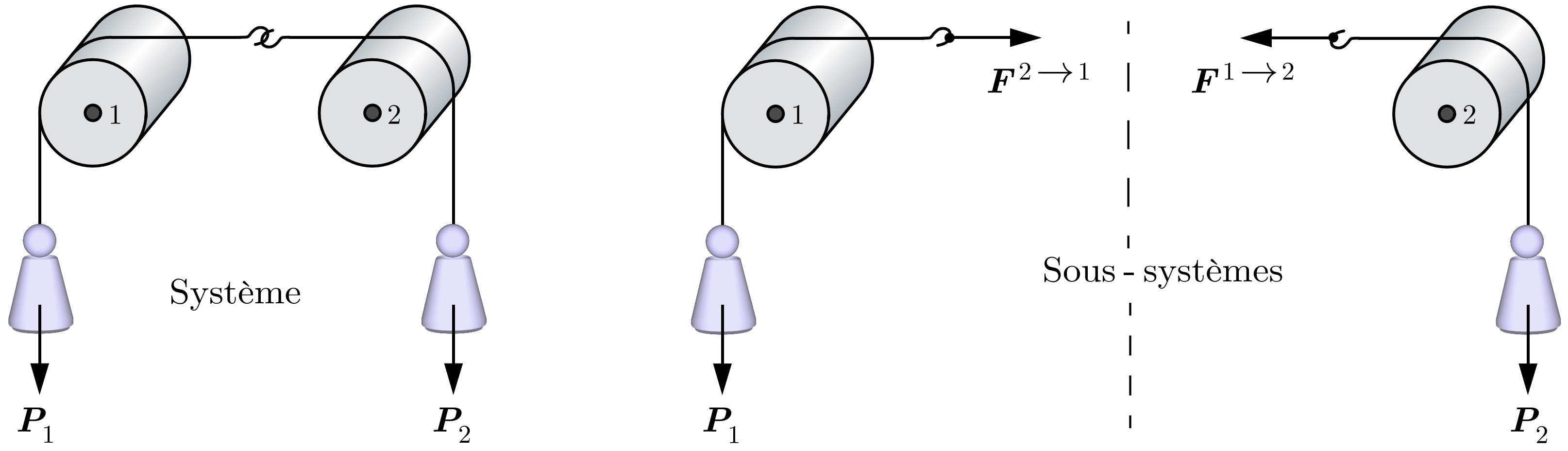
> Un point matériel 1 qui exerce une force d'action $\boldsymbol{F}^{1\rightarrow 2}$ sur un point matériel 2 subit une force de réaction $\boldsymbol{F}^{2\rightarrow 1}$ d'intensité égale, de même direction et de sens opposé, exercée par le point matériel 2.

Modèle mathématique :

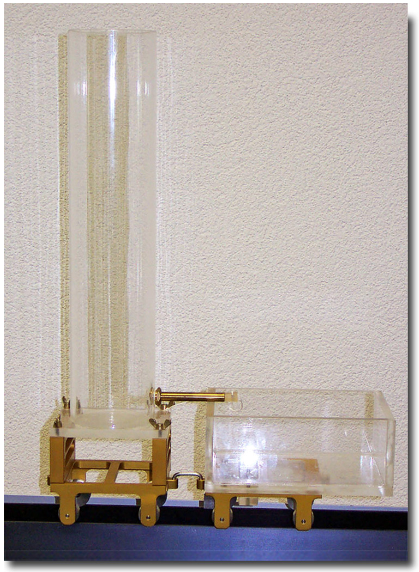
(8.1)

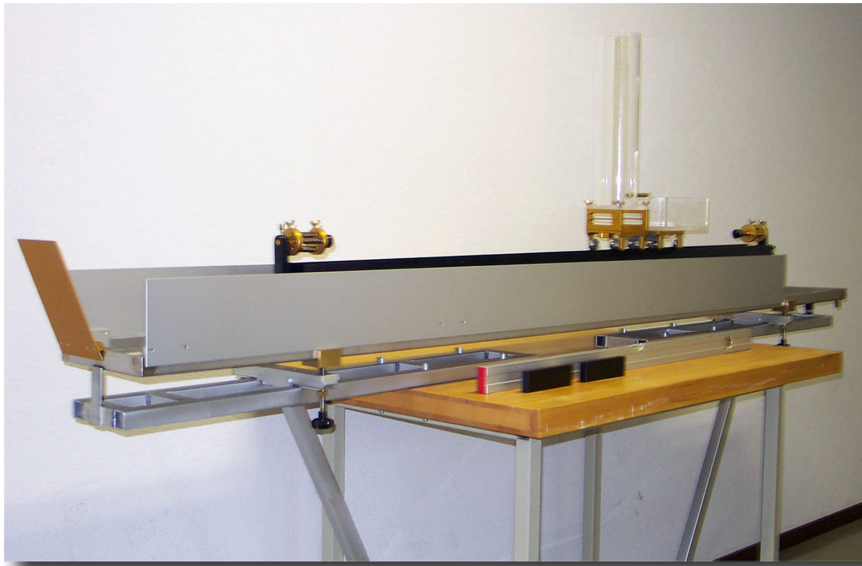
1. Relation de cause (force d'action) à effet (force de réaction).
2. Loi d'interaction entre points matériels.

- **Système :** constitué de deux points matériels 1 et 2 en interaction.
- **Sous-systèmes :** constitués d'un point matériel 1 ou 2.



- **Forces d'interaction :** $\boldsymbol{F}^{1\rightarrow2}$ et $\boldsymbol{F}^{2\rightarrow1}$
  1. **Système :** forces intérieures
  2. **Sous-systèmes :** forces extérieures
- **Poids :** $\boldsymbol{P}_1$ et $\boldsymbol{P}_2$
  1. **Système :** forces extérieures
  2. **Sous-systèmes :** forces extérieures





- L'eau contenue dans le réservoir cylindrique du chariot posé sur des rails s'écoule du robinet horizontal situé au bas du chariot (pression de l'eau).

1. **Chariot sans wagon récepteur :** la force exercée par l'eau qui s'écoule du chariot est une force extérieure qui provoque le déplacement du chariot dans la direction opposée à l'écoulement.

2. **Chariot avec wagon récepteur :** la force exercée par l'eau qui s'écoule du chariot dans le wagon récepteur est une force d'interaction intérieure au système formé du chariot et du wagon. D'après la loi d'action-réaction, elle est égale et opposée à la force exercée par l'eau sur le wagon récepteur. Par conséquent le système est immobile.

- **Système isolé :** système de points matériels qui n'a pas d'interaction résultante avec l'extérieur (ou l'environnement).
- **Système :** isolé constitué de deux points matériels (sous-systèmes).
- **2e loi de Newton :** sous-systèmes 1 et 2

$$\tag{8.2}$$

- **3e loi de Newton :** système

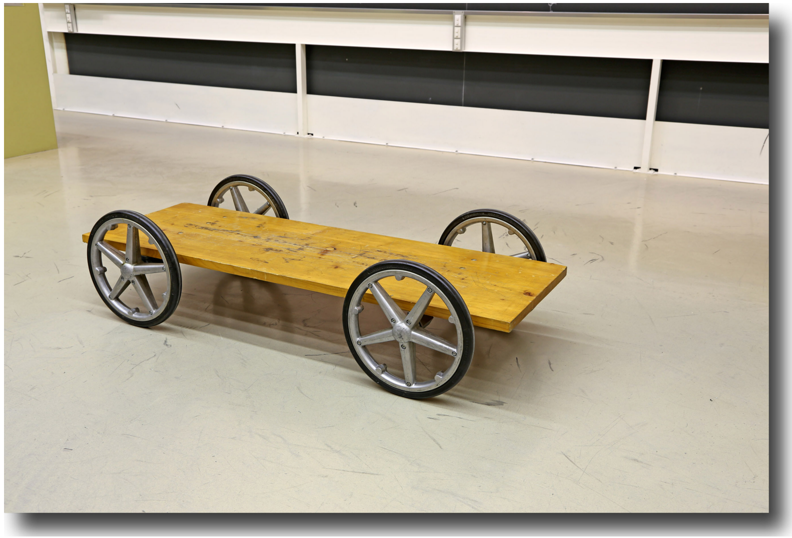
$$\boldsymbol{F}^{\,1\rightarrow 2} + \boldsymbol{F}^{\,2\rightarrow 1} = \boldsymbol{0} \tag{8.1}$$

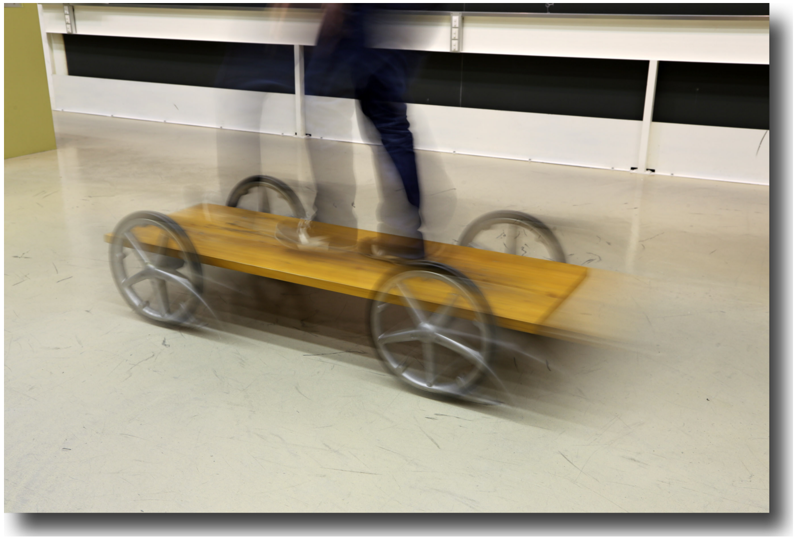
- **2e loi de Newton :** système (8.2) et (8.1) avec $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$

$$\tag{8.3}$$

- **Conservation de la quantité de mouvement :** système isolé

$$\tag{8.4}$$





- **Etat de repos initial :** la quantité de mouvement totale $\boldsymbol{p}$ du système formé de l'étudiant(e) et du chariot est nulle. Leur poids total $\boldsymbol{P}$ est compensé par la force de réaction normale $\boldsymbol{N}$ exercée par le sol. Ainsi, le système est isolé.

(8.5)

- **Etat de mouvement :** par conservation de la quantité de mouvement totale, l'étudiant(e) se déplace sur le chariot avec une quantité de mouvement $\boldsymbol{p}_1$ et le chariot se déplace dans le sens opposé avec une quantité de mouvement opposée $\boldsymbol{p}_2$.

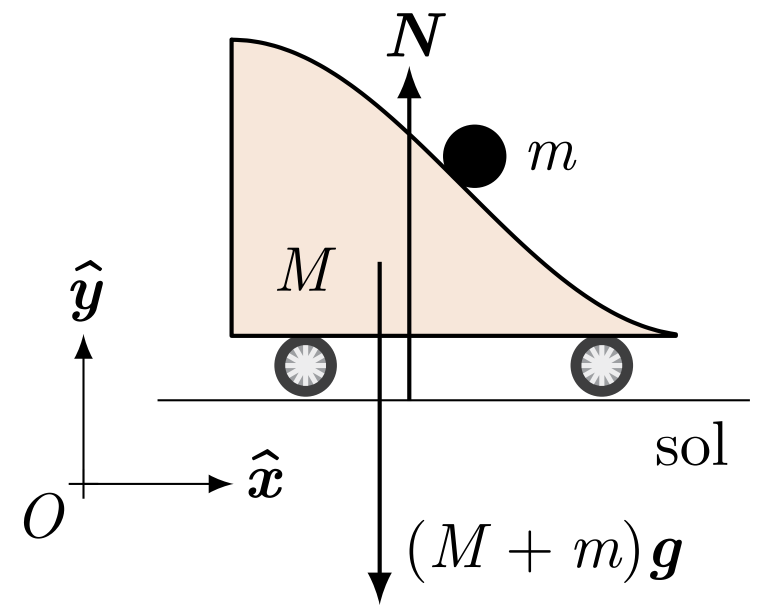
(8.6)

1. **Système :** chariot de masse M et boulet de masse m

- **Forces extérieures :** verticales (8.7)

  1. **Poids :**

  2. **Réaction normale :** sol



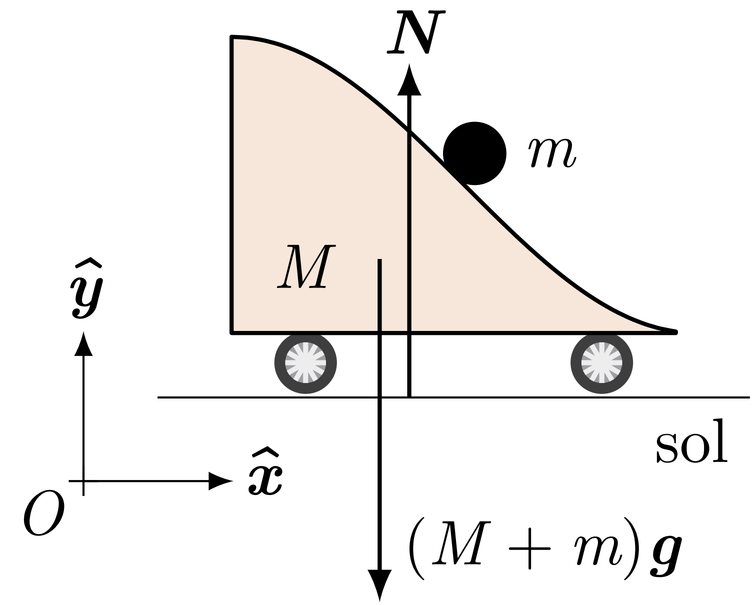
- **Quantité de mouvement totale :**

$$(8.8)$$

- **Loi du mouvement :**

$$(8.9)$$

- **Système :** chariot et boulet



- **Loi du mouvement :**

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} = \dot{\boldsymbol{p}} \tag{8.9}$$

1. selon $\hat{\boldsymbol{x}}$: (8.10)
2. selon $\hat{\boldsymbol{y}}$:

- **Conservation de la quantité de mouvement :** composante horizontale

(8.11)

- **Vitesses :** chariot de masse M et boulet de masse m

(8.12)

- **Chute du boulet :** la composante verticale de la quantité de mouvement p_y n'est pas constante car la composante verticale de la somme des forces extérieures $-\,(M+m)\,g + N$ est non-nulle.

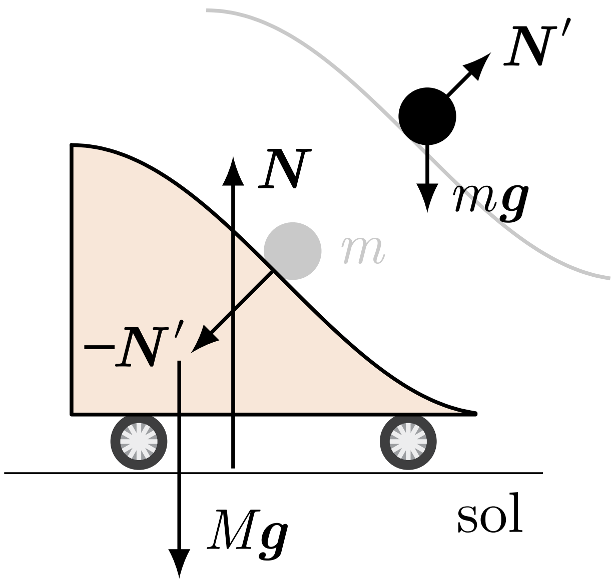
2. **Sous-système :** boulet de masse m

- **Forces extérieures :**

  1. **Poids :** $\boldsymbol{P}_m = m\,\boldsymbol{g}$

  2. **Réaction normale :** chariot $\boldsymbol{N}'$

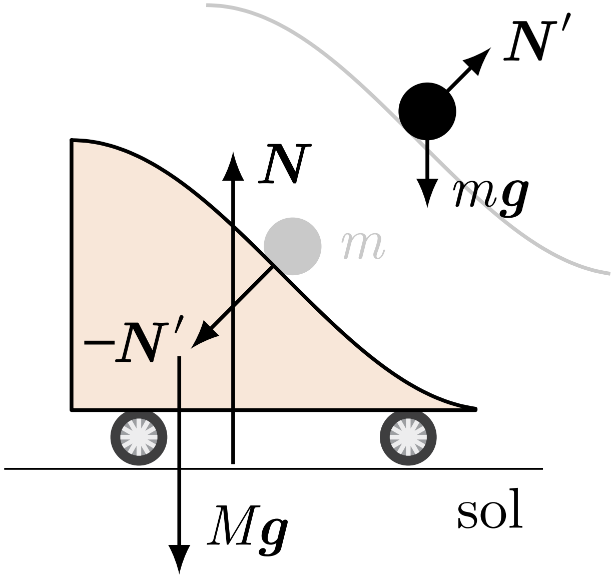
- **Loi du mouvement :** (8.13)



- **Accélération :** l'accélération $\boldsymbol{a}_m$ du boulet est tangente à la surface du chariot (contrainte géométrique).

- **Force de réaction normale :** la force de réaction normale $\boldsymbol{N}'$ exercée par le chariot est une force extérieure au sous-système du boulet mais c'est une force intérieure au système formé du chariot et du boulet.

- **Sous-système** : chariot de masse M
- **Forces extérieures :**
  1. **Poids :** $\boldsymbol{P}_M = M\,\boldsymbol{g}$
  2. **Réaction normale :** sol $\boldsymbol{N}$
  3. **Réaction normale :** boulet $-\boldsymbol{N}'$
- **Loi du mouvement :** (8.14)



- **Accélération :** l'accélération $\boldsymbol{a}_M$ du chariot est horizontale (contrainte géométrique).
- **Force de réaction normale** : la force de réaction normale $-\boldsymbol{N}'$ exercée par le boulet sur le chariot est l'opposé de la force de réaction normale $\boldsymbol{N}'$ exercée par le chariot sur le boulet (loi d'action-réaction).

1. **Chariot et boulet :** loi vectorielle du mouvement

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} = \dot{\boldsymbol{p}} \tag{8.9}$$

2. **Boulet :** loi vectorielle du mouvement

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{P}_m + \boldsymbol{N}' = m\,\boldsymbol{a}_m \tag{8.13}$$

3. **Chariot :** loi vectorielle du mouvement

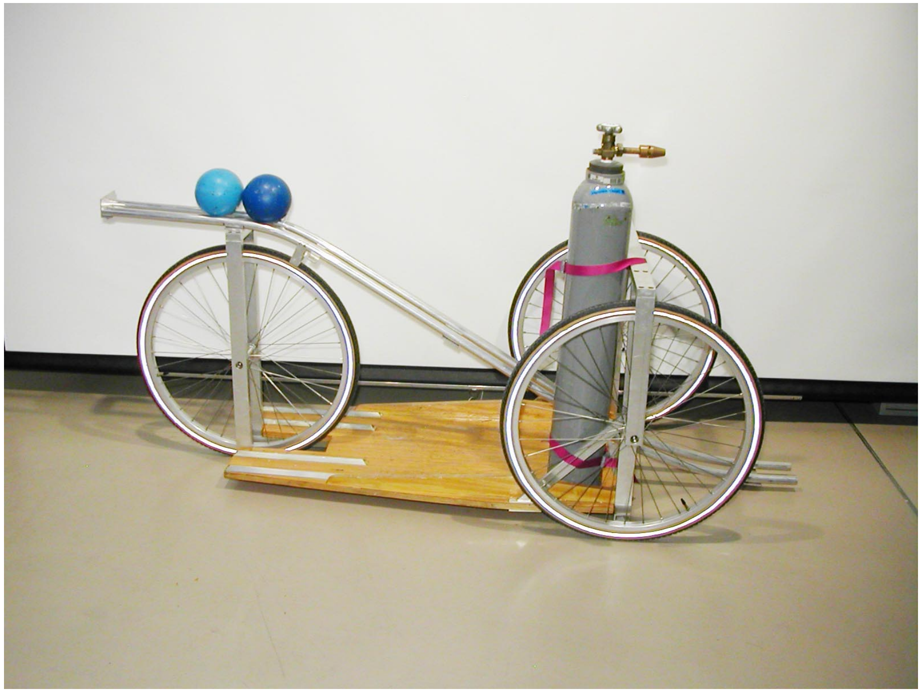
$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{P}_M + \boldsymbol{N} - \boldsymbol{N}' = M\,\boldsymbol{a}_M \tag{8.14}$$

- **Poids :** chariot et boulet

(8.15)

- **Lois du mouvement :** linéairement dépendantes $(8.13) + (8.14) = (8.9)$

(8.16)

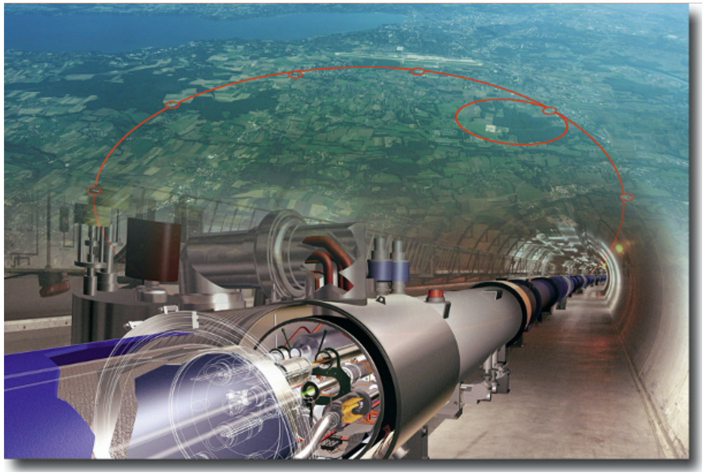


- **Conservation de la quantité de mouvement :** lors de la chute des boulets le long du rail du chariot, la composante horizontale de la quantité de mouvement totale est conservée. Elle est nulle en tout temps. Cela implique que lorsque le chariot se déplace dans une direction, les boulets se déplacent dans la direction opposée.

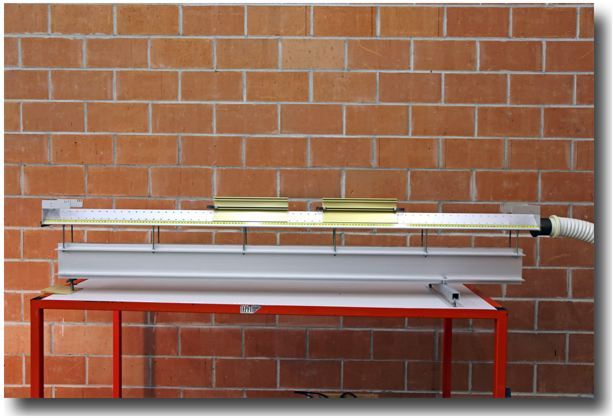
- **Accélération verticale :** la chute des boulets le long du rail signifie que la composante verticale de la quantité de mouvement n'est pas constante.

- **Modèle de collision** : choc très court entre deux points matériels avec conservation de la quantité de mouvement totale $\boldsymbol{p}$.
  1. **Collision élastique :** l'énergie cinétique totale T est conservée lors du choc.
  2. **Collision inélastique :** l'énergie cinétique totale T n'est pas conservée lors du choc.

LHC

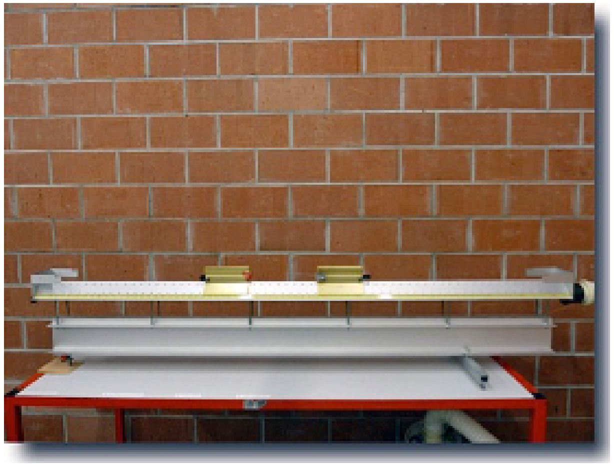


Choc élastique

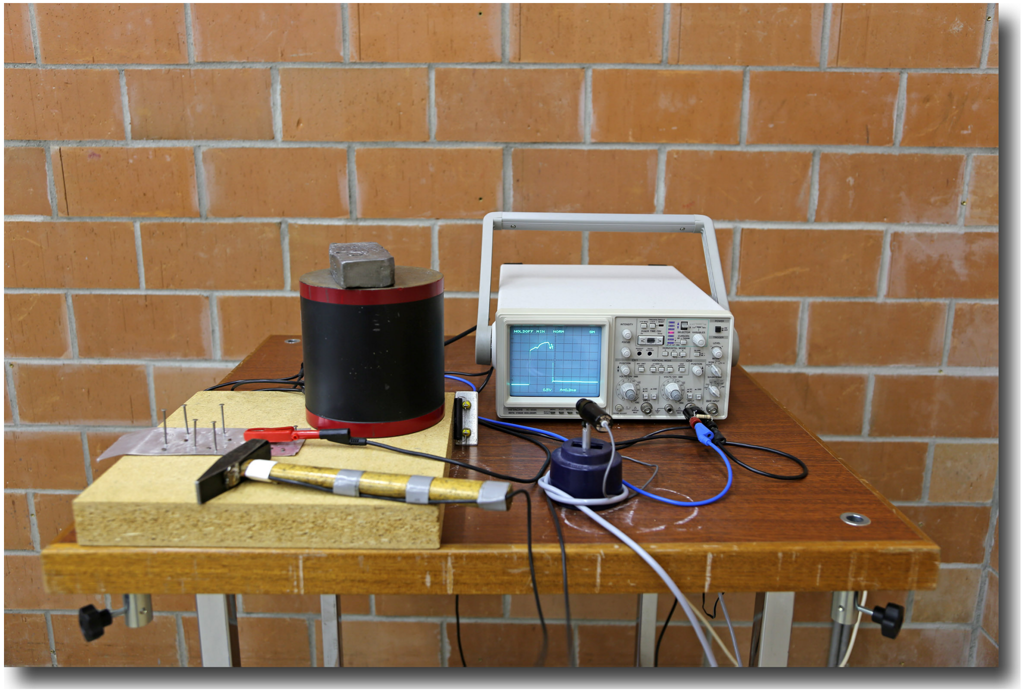


Lamelles métalliques

Choc inélastique



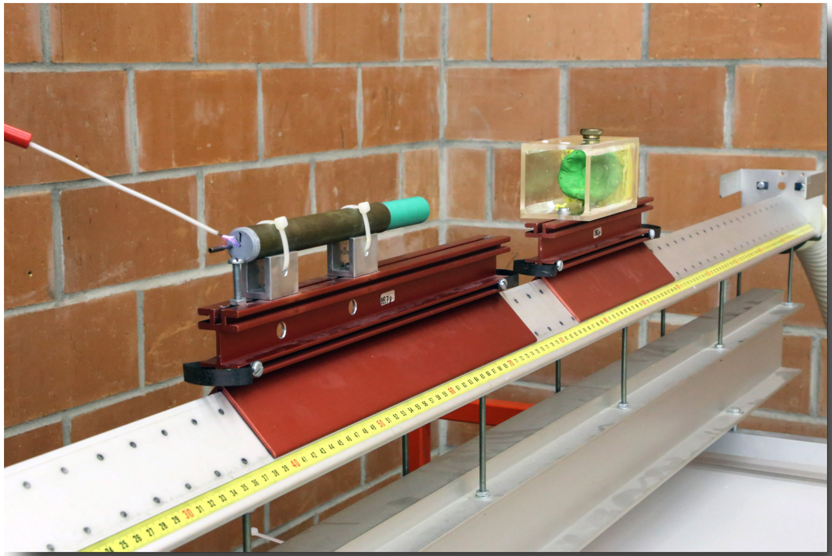
Pointe et pâte à modeler



- On frappe avec un marteau sur une enclume en acier ou sur un bloc en plomb posé sur l'enclume. Deux fils électriques relient l'enclume et le marteau à un oscilloscope.

- Lorsque le marteau est en contact avec l'enclume ou le bloc, le circuit électrique se ferme et un courant électrique circule. Sur l'oscilloscope, on mesure la durée de circulation du courant.

- On constate que la durée du choc est plus longue avec le bloc de plomb qu'avec l'enclume en acier car le choc est moins élastique.



- **Recul :** lors de l'explosion du combustible (H_2), le glisseur subit un effet de recul pour que la quantité de mouvement totale soit conservée : elle est nulle en tout temps. Comme le glisseur est beaucoup plus lourd que le projectile, le recul du glisseur est faible.

- **Arme à feu :** le recul des armes à feu est aussi dû à la conservation de la quantité de mouvement totale. Comme l'arme est beaucoup plus lourde que la balle, le recul de l'arme n'est pas trop important.

- **Modèle :** choc élastique entre deux points matériels (système isolé)
  1. **Conservation de la quantité de mouvement :** système isolé

     (8.17)

  2. **Conservation de l'énergie cinétique :** choc élastique

     (8.18)

- **Etat initial :** référentiel du deuxième point matériel (au repos)

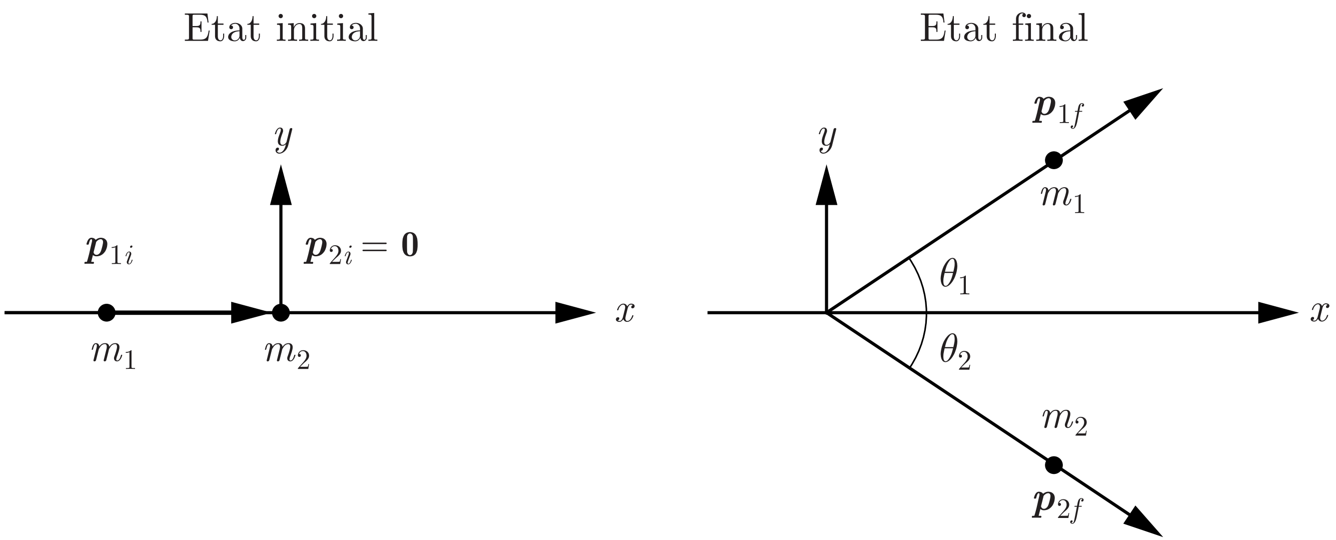
  (8.19)

  1. **Bilan de quantité de mouvement :** état initial i et état final f

     (8.20)

  2. **Bilan d'énergie cinétique :** choc élastique

     (8.21)

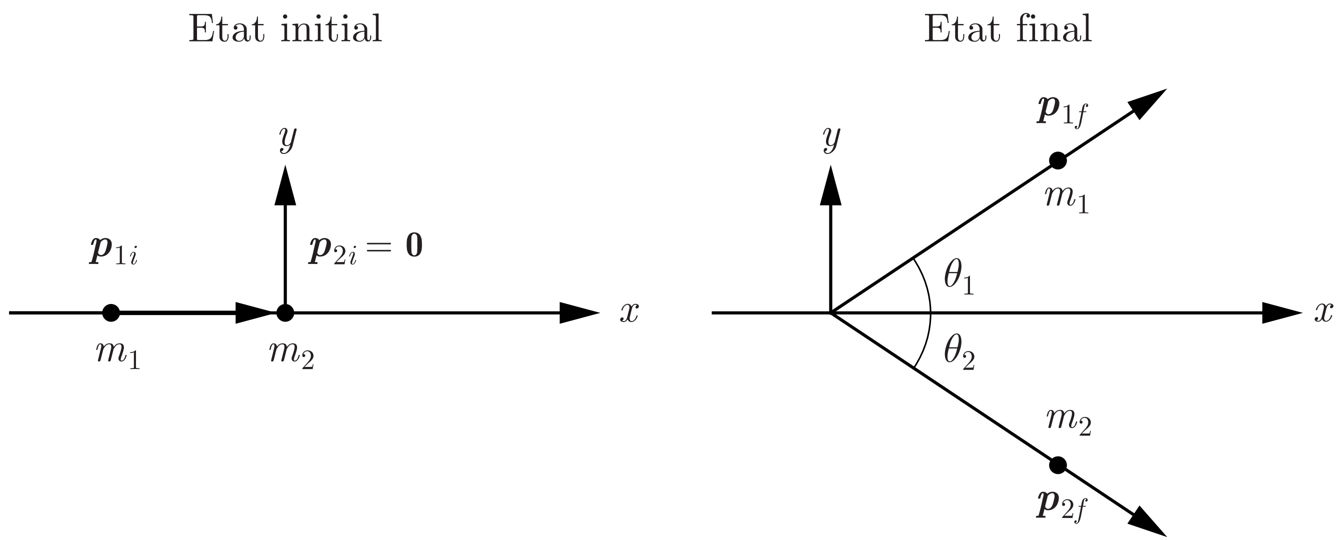


- **Bilan de la quantité de mouvement :** projections

  1. selon $\hat{\boldsymbol{x}}$:
  2. selon $\hat{\boldsymbol{y}}$: (8.22)

- **Bilan de la quantité de mouvement :** (8.22) au carré

  1. selon $\hat{\boldsymbol{x}}$:
  2. selon $\hat{\boldsymbol{y}}$: (8.23)



- **Bilan de la quantité de mouvement :** au carré

  1. selon $\hat{\boldsymbol{x}}$: $\quad (p_{1i} - p_{1f}\cos\theta_1)^2 = p_{2f}^2\cos^2\theta_2$

  2. selon $\hat{\boldsymbol{y}}$: $\quad p_{1f}^2\sin^2\theta_1 = p_{2f}^2\sin^2\theta_2 \qquad (8.23)$

- **Somme des équations de bilan :** (8.23)

$$(8.24)$$

- **Energie cinétique :**

$$(8.25)$$

- **Bilan de l'énergie cinétique :**

$$ \tag{8.26} $$

- **Bilan de l'énergie cinétique :** remis en forme

$$ \tag{8.27} $$

- **Bilan de la quantité de mouvement :**

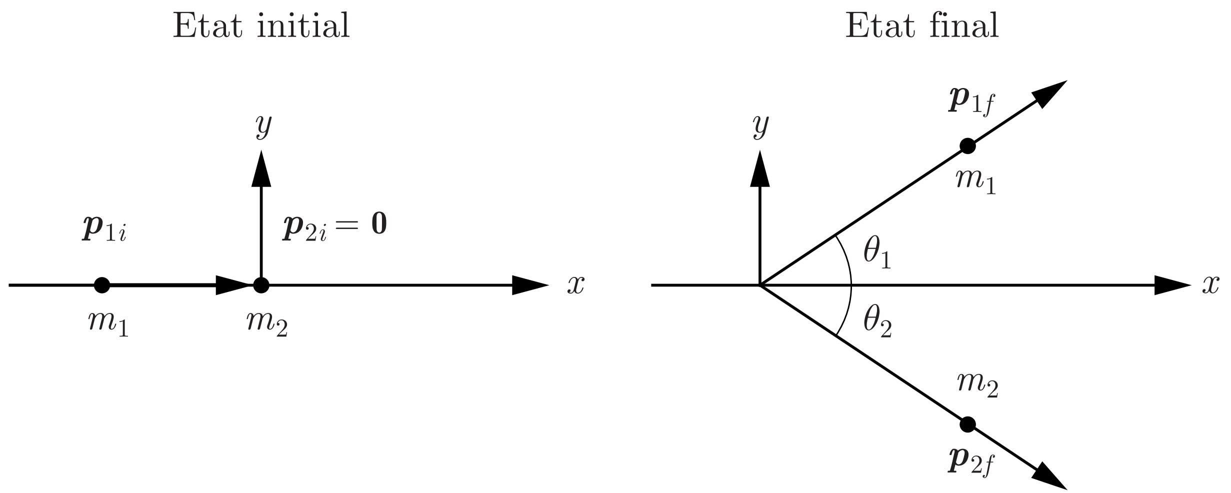
$$p_{2f}^2 = (p_{1i} - p_{1f}\cos\theta_1)^2 + p_{1f}^2\sin^2\theta_1 \tag{8.24}$$

- **Identification :** quantité de mouvement au carré (8.24) et (8.27)

$$ \tag{8.28} $$

- **Equation quadratique :** quantité de mouvement (8.28) remise en forme

$$ \tag{8.29} $$



- **Equation quadratique :** quantité de mouvement

$$\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)p_{1\,f}^2 - 2\,p_{1\,i}\,p_{1\,f}\cos\theta_1 + \left(1-\frac{m_2}{m_1}\right)p_{1\,i}^2 = 0 \qquad (8.29)$$

- **Equation quadratique :** (8.29) remise en forme

(8.30)

- **Solution :** (8.31) équation quadratique (8.30)

❶ **Masses égales :**

- **Bilan de la quantité de mouvement :**

$$(8.32)$$

- **Bilan de l'énergie cinétique :**

$$(8.33)$$

- **Bilan de la quantité de mouvement :** (8.33) au carré

$$(8.34)$$

- **Différences des équations de bilan :** $(8.34) - (8.33)$

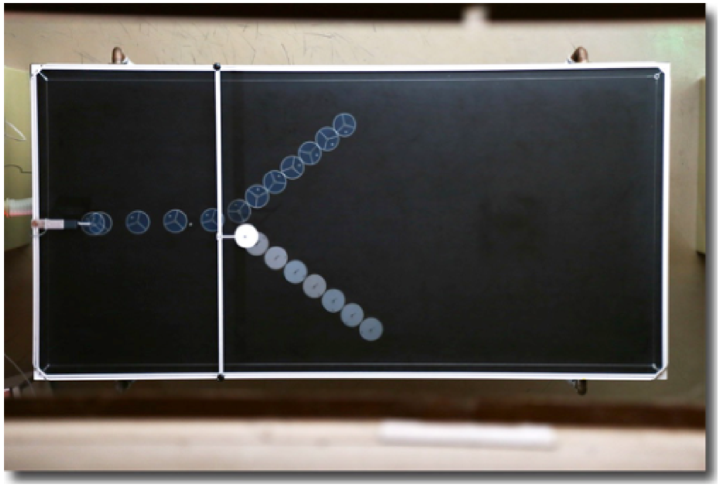
$$\left\{ \right. \qquad (8.35)$$

1. **Masses égales :** $m_1 = m_2 \equiv m$

- **Différences des équations de bilan :**

$$\boldsymbol{v}_{1f} \cdot \boldsymbol{v}_{2f} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{si} \;\; \boldsymbol{v}_{1f} \neq \boldsymbol{0} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v}_{2f} \neq \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 + \theta_2 = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{si} \;\; \boldsymbol{v}_{1f} = \boldsymbol{0} \quad \overset{(8.32)}{\Rightarrow} \quad \boldsymbol{v}_{2f} = \boldsymbol{v}_{1i} \end{cases} \tag{8.35}$$

- **Collision de pucks identiques :** le puck bleu lancé depuis la gauche heurte le puck blanc initialement au repos. Après le choc, l'angle entre les trajectoires est en théorie de 90°. En pratique, cet angle est légèrement inférieur à 90° car les pucks ne sont pas des points matériels et ils ont un mouvement de rotation propre.



2. **Choc rectiligne :**

- **Solution générale :**

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\cos\theta_1 \pm \sqrt{\cos^2\theta_1 - \left(1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}\right)}\right) \tag{8.31}$$

- **Choc rectiligne :**

$$\tag{8.36}$$

Si $v_{1f} = v_{1i}$ alors $v_{2f} = 0$: cela signifie que le premier point matériel ne subit aucun choc avec le deuxième point matériel qui est "virtuel". La solution non physique avec un signe "$+$" est donc à rejeter.

- **Vitesse finale :** (8.36) avec un signe "$-$"

$$\tag{8.37}$$

2. **Choc rectiligne :** $\theta_1 = \theta_2 = 0$

- **Vitesse finale :** point matériel 1

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_{1i} \tag{8.37}$$

- **Bilan de l'énergie cinétique :**

(8.38)

- **Bilan de l'énergie cinétique :** remis en forme

(8.39)

- **Vitesse finale quadratique :** (8.37) dans (8.39)

(8.40)

- **Vitesse finale :** point matériel 2

(8.41)

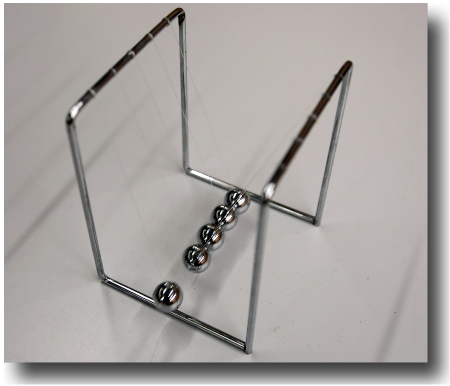
Choc rectiligne : $\theta_1 = \theta_2 = 0$

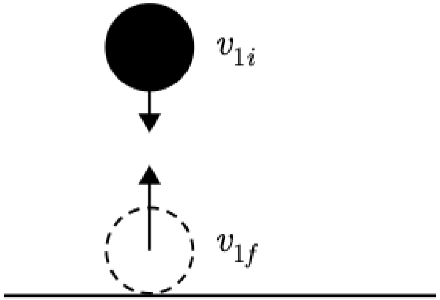
- **Vitesse finale :** point matériel 1

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_{1i} \tag{8.37}$$

- **Vitesse finale :** point matériel 2

$$v_{2f} = \frac{2\, m_1}{m_1 + m_2}\, v_{1i} \tag{8.41}$$



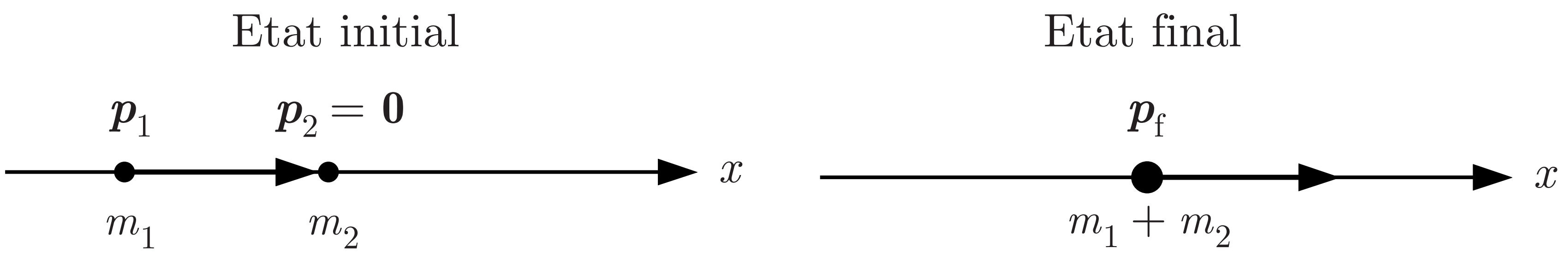


- **Cas particuliers :**

  1. **Masses égales :** boules de billard, boulier

  2. **Masse infinie :** rebond de balle, choc de molécule contre une paroi

- **Choc mou :** choc parfaitement inélastique entre deux points matériels qui restent attachés l'un à l'autre après le choc.



- **Bilan de quantité de mouvement :**

(8.42)

- **Bilan de quantité de mouvement :** (8.42) remis en forme

(8.43)

- **Vitesse finale :** (8.43) remis en forme

(8.44)

- **Vitesse finale :**

$$\boldsymbol{v}_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,\boldsymbol{v}_1 \tag{8.44}$$

- **Energie cinétique initiale :**

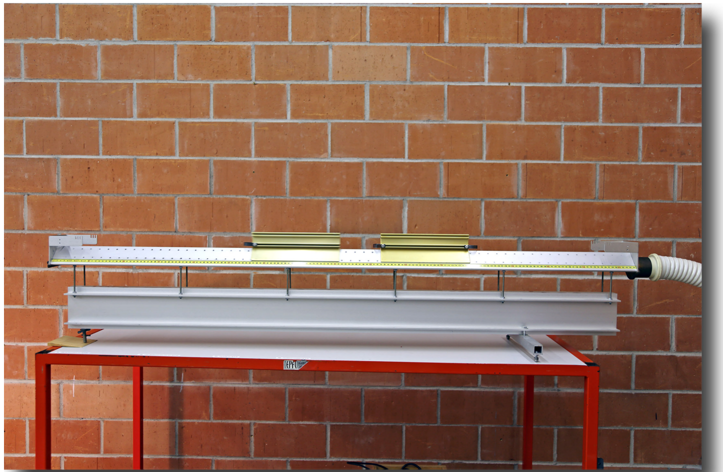
$$\tag{8.45}$$

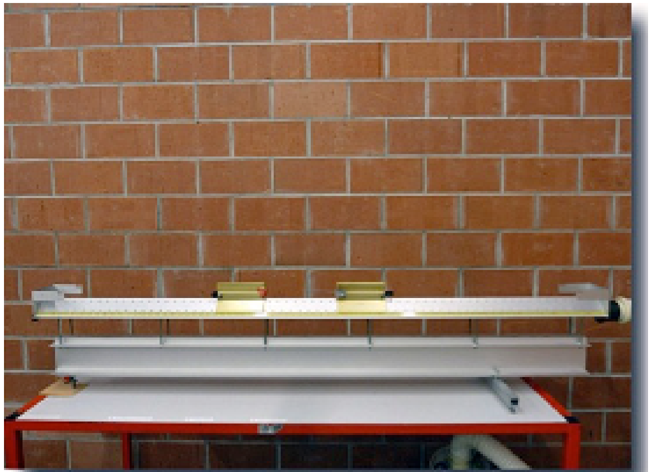
- **Energie cinétique finale :**

$$\tag{8.46}$$

- **Variation d'énergie cinétique :** dissipation (8.47)

L'énergie cinétique dissipée $\Delta T_{i \to f}$ lors du choc est utilisée essentiellement pour déformer les deux objets.





1. **Choc élastique :** les lamelles de deux glisseurs identiques entrent en collision sur un rail à air. Lors du choc, le glisseur initialement en mouvement s'arrête et le glisseur immobile se met en mouvement avec la vitesse initiale de l'autre glisseur.

$$m_1 = m_2 \qquad \text{ainsi} \qquad v_{1f} = 0 \qquad \text{et} \qquad v_{2f} = v_{1i}$$

2. **Choc mou :** la pointe d'un glisseur s'encastre dans la pâte à modeler fixée sur un autre glisseur de masse identique. Après le choc, le système formé des deux glisseurs se déplace avec la moitié de la vitesse initiale du glisseur en mouvement.

$$m_1 = m_2 \qquad \text{ainsi} \qquad v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, v_1 = \frac{1}{2}\, v_1$$

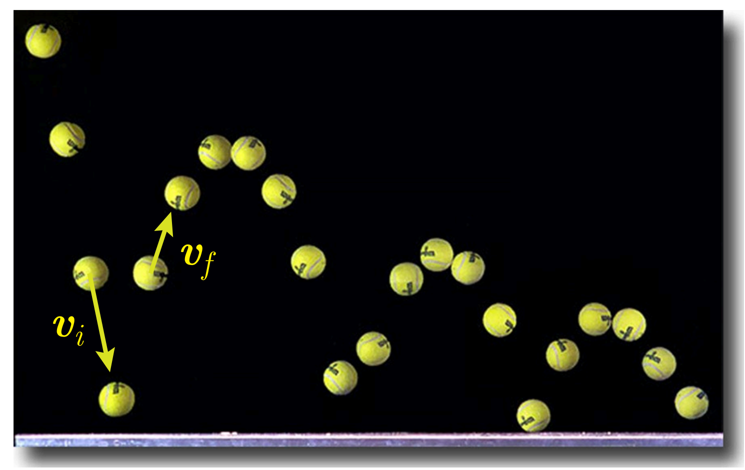
- **Coefficient de restitution :** e qui mesure l'élasticité d'une collision contre un objet de masse infinie.

(8.48)

1. **Choc élastique :** $e = 1$
2. **Choc inélastique :** $0 < e < 1$
3. **Choc mou :** $e = 0$

Basket : $e \approx 0.85$

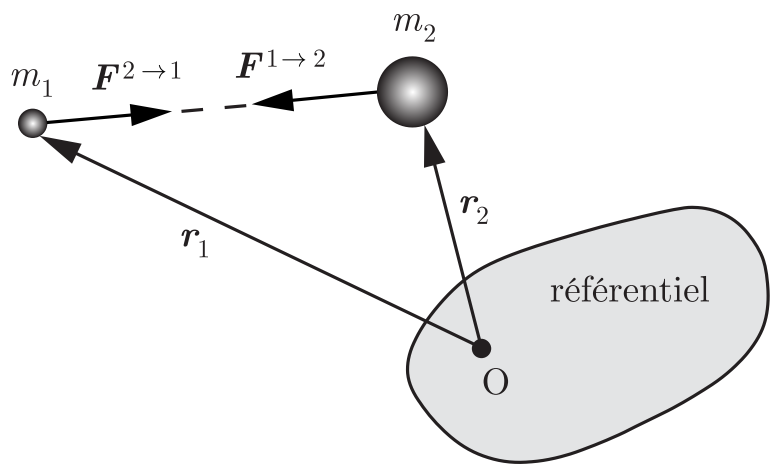
Tennis : $e \approx 0.8$



- Plus le matériau est dur, moins il se déformera durant le choc. Donc, plus le coefficient de restitution sera grand et vice versa.

- **Coefficient de restitution :** les balles ou billes faites des matériaux plus durs sont plus difficiles à déformer. Ainsi, leur perte d'énergie cinétique lors de la collision avec le sol sera plus faible. Par conséquent, le choc sera plus élastique et le coefficient de restitution plus grand, et vice-versa...

  1. **Acier :** $e \approx 0.90$
  2. **Ivoire :** $e \approx 0.85$
  3. **Bois :** $e \approx 0.5$



- **Loi du mouvement :** système isolé de 2 points matériels

$$(8.49)$$

- **Démarche :** les vecteurs positions $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{r}_2$ des deux points matériels définis par rapport à une origine arbitraire O sont remplacés le vecteur position du centre de masse $\boldsymbol{R}_G$ et le vecteur position relative $\boldsymbol{r}$.
- **Vecteur position du centre de masse :** système

$$(8.50)$$

- **Vecteur position relative :** système

$$(8.51)$$

- **Vecteurs position :** (8.50) et (8.51)

$$\boldsymbol{R}_G = \frac{m_1}{M}\,\boldsymbol{r}_1 + \frac{m_2}{M}\,\boldsymbol{r}_2 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$$

- **Dérivées temporelles secondes :** vecteurs positions

$$\tag{8.52}$$

- **Lois du mouvement :** 2 points matériels

$$\boldsymbol{F}^{\,2\to 1} = m_1\,\ddot{\boldsymbol{r}}_1 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{F}^{\,1\to 2} = m_2\,\ddot{\boldsymbol{r}}_2 \tag{8.49}$$

- **Loi du mouvement :** somme (8.49) et (8.52)

$$\tag{8.53}$$

- **3$^{\text{e}}$ loi de Newton :** système des deux points matériels

$$\boldsymbol{F}^{\,2\to 1} + \boldsymbol{F}^{\,1\to 2} = \boldsymbol{0} \tag{8.1}$$

- **Loi du mouvement du centre de masse :** MRU (8.53) et (8.1)

$$\tag{8.54}$$

- **Lois du mouvement :** 2 points matériels

$$\boldsymbol{F}^{\,2\rightarrow 1} = m_1\,\ddot{\boldsymbol{r}}_1 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{F}^{\,1\rightarrow 2} = m_2\,\ddot{\boldsymbol{r}}_2 \tag{8.49}$$

- **Masse réduite :** μ du système

$$\tag{8.55}$$

- **Loi du mouvement :** (8.55) et différence (8.49)

$$\tag{8.56}$$

- **3^{e} loi de Newton :** système des deux points matériels

$$\tag{8.57}$$

- **Loi du mouvement réduit :** $(8.56) = (8.57)$ divisé par M

$$\tag{8.58}$$

- Le mouvement du problème à deux corps isolés se réduit au mouvement rectiligne uniforme du centre de masse et au mouvement réduit d'un objet de masse réduite μ.

- **Quantité de mouvement totale :** système de 2 points matériels

$$ \tag{8.59} $$

- **Energie cinétique totale :** système de 2 points matériels

$$ \tag{8.60} $$

- **Vecteurs position :** (8.50) et (8.51)

$$\boldsymbol{R}_G = \frac{m_1}{M}\,\boldsymbol{r}_1 + \frac{m_2}{M}\,\boldsymbol{r}_2 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$$

- **Masse réduite :** μ du système

$$\mu = \frac{m_1\,m_2}{M} \tag{8.55}$$

- **Vecteurs position :** inversions de (8.50) et (8.51)

$$ \tag{8.61} $$

- **Vecteurs vitesse :** dérivées temporelles de (8.61)

$$ \tag{8.62} $$

- **Quantité de mouvement totale :** système de 2 points matériels

$$\boldsymbol{p} = m_1\,\boldsymbol{v}_1 + m_2\,\boldsymbol{v}_2 \tag{8.59}$$

- **Vecteurs vitesse :**

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{V}_G + \frac{\mu}{m_1}\,\boldsymbol{v} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{V}_G - \frac{\mu}{m_2}\,\boldsymbol{v} \tag{8.62}$$

- **Quantité de mouvement totale :** (8.62) dans (8.59)

$$\tag{8.63}$$

La quantité de mouvement totale $\boldsymbol{p}$ est celle du centre de masse. La quantité de mouvement associée au mouvement relatif est nulle. C'est ce résultat essentiel qui justifie l'usage du modèle du point matériel.

- **Energie cinétique totale :** système de 2 points matériels

$$T = \frac{1}{2}\,m_1\,\boldsymbol{v}_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,\boldsymbol{v}_2^2 \tag{8.60}$$

- **Vecteurs vitesse :**

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{V}_G + \frac{\mu}{m_1}\,\boldsymbol{v} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{V}_G - \frac{\mu}{m_2}\,\boldsymbol{v} \tag{8.62}$$

- **Energie cinétique totale :** (8.62) dans (8.60)

$$\tag{8.64}$$

- **Energie cinétique totale :** (8.55) dans (8.64)

$$\tag{8.65}$$

L'énergie cinétique totale T est égale à la somme de l'énergie cinétique du centre de masse et de l'énergie cinétique réduite.

- **Positions relatives :** référentiel du centre de masse

(8.66)

- **Vitesses relatives :** dérivées temporelles de (8.66)

(8.67)

- **Masse réduite :** μ du système

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \qquad (8.55)$$

- **Quantité de mouvement relative :** référentiel du centre de masse

(8.68)

- **Energie cinétique relative :** référentiel du centre de masse

(8.69)